# THEORETIKUM ZUR ELEKTRODYNAMIK WS 10/11

**Aufgabenblatt 9** **21.1.2011**

*Aufgabe 8.2: Fourier-Reihen* ( 9 Punkte = 1 + 2 + 2 + 4 )

1. Beweisen Sie $\int\limits_{-L}^{L} \sin(\frac{k\pi x}{L})dx = \int\limits_{-L}^{L} \cos(\frac{k\pi x}{L})dx = 0$ falls $k = 1, 2, 3, \ldots$

2. Beweisen Sie $\frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} \sin(\frac{m\pi x}{L})\sin(\frac{n\pi x}{L})dx = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} \cos(\frac{m\pi x}{L})\cos(\frac{n\pi x}{L})dx = \delta_{mn}$ und $\int\limits_{-L}^{L} \sin(\frac{m\pi x}{L})\cos(\frac{n\pi x}{L})dx = 0$ , wobei $m, n = 1, 2, 3 \ldots$

3. Zeigen Sie, dass, wenn die Fourier-Reihe $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(\frac{n\pi x}{L}) + b_n\sin(\frac{n\pi x}{L})]$ in $(-L, L)$ gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergiert, für die Fourier-Koeffizenten gilt
   a) $a_n = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})dx$ ,
   b) $b_n = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})dx$ ,
   c) $a_0 = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(x)dx$ .

4. Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten der periodischen Funktion
   $f(x) = f(x+10) = \begin{cases} 0 \text{ falls } -5 < x < 0 \\ 3 \text{ falls } 0 < x < 5 \end{cases}$ .
   *Tip:* Berechnen Sie die Koeffizienten für das Intervall $(-5, 5)$.

*Anmerkung:* Eine Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ konvergiert *gleichmäßig* gegen eine Funktion $f(x)$, wenn man zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N > 0$ findet, so dass *für alle* $x$ gilt: $|\sum\limits_{n=1}^{n} u_n(x) - f(x)| < \epsilon$ für alle $n > N$. Diese Eigenschaft braucht man, um in Teilaufgabe 3 Summen und Integrale vertauschen zu dürfen.

*Aufgabe 8.2: Dipol* (11 Punkte = 1 + 1 + 1 + 1 + 3 + 2 + 2)

Gegeben seien die Ladung $q_1 > 0$ im Punkt $(0, 0, d_1/2)$ und die Ladung $-q_1$ im Punkt $(0, 0, -d_1/2)$, wobei $d_1 > 0$. Es wird angenommen, dass die zwei Ladungen sich nicht bewegen.

1. Bestimmen Sie das Potential $\varphi(\vec{r})$ in Kugelkoordinaten für $r = |\vec{r}| \gg d_1$.

2. Bestimmen Sie das Potential $\varphi(\vec{r})$ in kartesischen Koordinaten für $|\vec{r}| \gg d_1$.

3. Bestimmen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ in Kugelkoordinaten.

4. Bestimmen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ in kartesischen Koordinaten.

5. Das Zentrum eines zweiten Dipols mit Ladungen $q_2 > 0$ und $-q_2$ befindet sich im Punkt $(0, 0, R_2)$, $R_2 \gg d_1$. Zur Zeit $t = 0$ befindet sich $q_2$ im Punkt $(0, 0, R_2 - d_2/2)$ und $-q_2$ im Punkt $(0, 0, R_2 + d_2/2)$. Der Abstand $d_2$ und das Zentrum $(0, 0, R_2)$ seien fixiert. Der Dipol kann aber unter dem Einfluss des ersten Dipols rotieren. Wie lautet die Endlage des zweiten Dipols für $t \gg 0$, wenn das Gleichgewicht erreicht wird?

6. Wie lautet die potentielle Energie des zweiten Dipols zur Zeit $t = 0$ und zur Zeit $t \gg 0$?
7. Wie lautet die Kraft, die auf den zweiten Dipol wirkt, zur Zeit $t \gg 0$?

*Aufgabe 3: Quadrupol* (10 Punkte = 1 + 1 + 2 + 3 + 1 + 2 )

Gegeben seien vier Punktladungen: Eine Ladung $-q_0 < 0$ im Punkt $(d, 0, 0)$, $d > 0$, eine Ladung $q_0$ in $(0, -d, 0)$, eine Ladung $-q_0$ in $(-d, 0, 0)$ und eine Ladung $q_0$ in $(0, d, 0)$. Betrachten Sie eine Multipol-Entwicklung dieses Systems.

1. Zeichnen Sie die Verteilung der Ladungen.
2. Zeigen Sie, dass der Monopol-Beitrag zum Potential verschwindet.
3. Zeigen Sie, dass der Dipol-Beitrag zum Potential verschwindet.
4. Wie lautet der Quadrupol-Beitrag zum Potential für $\vec{r} = (0, y, 0)$, $y \gg d$ ?
5. Wie lautet der Quadrupol-Beitrag zum Potential für $\vec{r} = (x, 0, 0)$, $x \gg d$ ?
6. Wie lautet der Quadrupol-Beitrag zum Potential für $\vec{r} = (0, 0, z)$, $z \gg d$ ?