THEORETIKUM ZUR MECHANIK I WS 09/10

Aufgabenblatt 7 **4.12.2009**

Aufgabe 1: Elektrisches Feld (10 Punkte)

Wenn ein elektrisches Feld $\vec{E}$ vorhanden ist, wirkt auf ein Teilchen mit Masse m und Ladung q eine Kraft $\vec{F} = q\vec{E}$. Gegeben sei das folgende Feld $\vec{E} = (E(x), 0, 0)$, wobei

$$E(x) = \begin{cases} 0 \text{ für } x < 0 \text{ und } x > 2x_1 \\ E_1 > 0 \text{ für } 0 \le x \le x_1 \\ E_2 \text{ für } x_1 < x \le 2x_1 \end{cases} . \tag{1}$$

Ein Teilchen mit Masse m und Ladung $q > 0$ befinde sich zur Zeit $t = 0$ bei $x(t = 0) = 0$ mit Geschwindigkeit $\dot{x}(t = 0) = 0$. Berechne und zeichne die Bahn $x(t)$ des Teilchens. (Je nach Wert von E_2 sind zwei unterschiedliche Trajektorien möglich. Worin unterscheiden sie sich? Wie lautet der kritische Wert von E_2?)

Aufgabe 2: Reibung (10 Punkte = 5+5)

Gegeben sei ein Teilchen mit Masse m. Seien die Anfangsbedingungen $z(t = 0) = z_0 > 0$ und $\dot{z}(t = 0) = 0$. Auf das Teilchen wirken entlang der z-Richtung die Gravitationskraft $F_g = -mg$ und die Reibungskraft $F_r = -\alpha\dot{z}$ ($\alpha > 0$).

a) Berechne $\dot{z}(t) = v(t)$. Zeichne den Verlauf der Funktion $v(t)$. Wie lautet der Limes $\lim_{t\to\infty} v(t)$?

b) Berechne $z(t)$. Wie sieht die Funktion aus?

Hinweis: Eine Differentialgleichung der Form $f'(x) = \frac{df}{dx} = h(x)g(f)$ kann durch Trennung der Variablen leicht gelöst werden. Zuerst schreibt man $\frac{df}{g(f)} = h(x)dx$, dann integriert man: $\int \frac{df}{g(f)} = \int h(x)dx$. Die Anfangsbedingung $f(x_0) = f_0$ erlaubt, eine eindeutige Lösung zu bekommen.

Aufgabe 3: Rakete (10 Punkte)

Eine Rakete der Anfangsmasse m_0 stoße pro Zeitintervall Δt die konstante Gasmenge der Masse Δm mit der relativen Geschwindigkeit v_0 aus. Die Ausstoßrate $\alpha \equiv \frac{\Delta m}{\Delta t}$ sei also zeitlich konstant.
Gib die Bewegungsgleichung der Rakete im konstanten Gravitationsfeld unter Vernachlässigung der Luftreibung an.
Die Rakete starte zur Zeit $t = 0$ vom Boden aus senkrecht nach oben. Gib die Geschwindigkeit und die Höhe als Funktion der Zeit an.

Anleitung: Zeige zunächst, dass durch den Gasausstoß eine Rückstoßkraft von $\vec{F} = -\alpha(v - v_0)\vec{e}_3$ auf die Rakete wirkt, wobei v die Geschwindigkeit der Rakete ist. Setze diese Kraft zusammen mit der Erdanziehungskraft in die Newtonsche Bewegungsgleichung $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ ein. (Dabei ist $\vec{p}(t) \equiv m(t)\,\vec{v}(t)$ der Impuls der Rakete.) Schreibe sie durch Substitution von $\dot{x} = v$ in eine Differentialgleichung erster Ordnung um. Trenne die Variablen v und t und integriere dann.