THEORETIKUM ZUR MECHANIK I WS 09/10

Aufgabenblatt 6 **27.11.2009**

Aufgabe 1: Zykloidenbahnen (15 Punkte = 5+5+3+2)

Ein dünnwandiger Hohlzylinder mit Radius R rollt mit konstanter Geschwindigkeit. Sei $\vec{v}_C = (v, 0, 0)$ die Geschwindigkeit des Schwerpunktes (d.h., der Achse des Zylinders).

a) Wie sieht die Trajektorie $\vec{r}(t)$ eines gedachten Punktes P aus, der im Abstand a von der Achse fest mit dem Zylinder verbunden ist? Man mache sich den qualitativen Unterschied der Fälle $a < R\,,\ a = R$ und $a > R$ klar. Zeichne die Trajektorien.

b) Berechne die Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(t)$ des Punktes P. Zeichne die Bahnen des Vektors $\vec{v}(t)$ im Geschwindigkeitsraum in den Fällen $a < R\,,\ a = R$ und $a > R$. (Geschwindigkeitsraum: v_x, v_y, v_z bilden ein kartesisches Koordinatensystem.)

c) Um welche Zeiten ist $|\vec{v}(t)|$ maximal und um welche Zeiten minimal? Zeichne den Verlauf der Funktion $|\vec{v}(t)|$.

d) Berechne die Beschleunigung $\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{a}(t)$ des Punktes P. Wie sieht die Bahn des Vektors $\vec{a}(t)$ im Beschleunigungsraum aus? (Beschleunigungsraum: a_x, a_y, a_z bilden ein kartesisches Koordinatensystem.)

Aufgabe 2: David gegen Georg (9 Punkte = 3+3+3)

David und Georg sind die besten Freunde, doch manchmal steht ihnen der Sinn nach einem Wettkampf. David hat sich eine Schleuder gebastelt, mit der er Steine mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_D = 15\frac{m}{s}$ abschießen kann. Georg ist im Besitz einer noch stärkeren Profi-Zwille mit $v_G = 17\frac{m}{s}$(!). Der Wettkampf besteht aus drei Disziplinen: (i) Weitschuss auf dem flachen Felde. (ii) Weitschuss in die Kiesgrube (Wasseroberfläche 50 Meter unterhalb des Uferrands, von dem aus geschossen wird). (iii) Weitschuss auf das horizontale, 25 Meter hohe Fabrikdach.
Geschossen wird jeweils bäuchlings, wobei Georg immer im Winkel von 45° schießt (wie auf der Zwillen-Verpackung empfohlen). David hingegen hat nachgerechnet und schießt immer mit der optimalen Steigung.
Kann David mit seiner selbstgebauten Schleuder den Wettkampf noch gewinnen?

Vernachlässige stets die Luftreibung.

Aufgabe 3: Anwendung auf allgemeine kugelsymmetrische Felder (6 Punkte: 1+1+2+2)

Berechne die Ausdrücke in Kugelkoordinaten

$$\vec{\nabla} f(r)\ ,\ \vec{\nabla} \cdot [f(r)\,\vec{e}_r]\ ,\ \Delta f(r)\ ,\ \vec{\nabla} \times [f(r)\,\vec{e}_r]$$

für ein allgemeines kugelsymmetrisches skalares Feld $f(r)$ sowie für den speziellen Fall $f(r) = r^n$.