

Aufgabe 1: $\vec{\nabla}$ -Gymnastik (6 Punkte = 2+2+2).

Seien \vec{a} und \vec{b} von \vec{r} abhängige Vektoren. Beweise folgende Relationen:

- a) $\vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} + (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b} + \vec{b} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) + \vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{b})$
 b) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b})$
 c) $\vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} - \vec{b}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b} + \vec{a}(\vec{\nabla} \cdot \vec{b})$

Gib in jedem Schritt an, auf welche Größe der Differentialoperator $\vec{\nabla}$ wirkt. Tipp: Nutze den Entwicklungssatz, die Produktregel der Differentialrechnung und die zyklische Invarianz des Spatproduktes aus.

Aufgabe 2: Kontinuität, Wirbel... (8 Punkte = 4+4).

a) Sei $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$ die Strömungsgeschwindigkeit und $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ die Dichte einer kompressiblen Flüssigkeit. Dann gilt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0.$$

Zeige, daß, wenn die Dichte ρ nicht explizit von der Zeit abhängt, folgende Gleichung folgt:

$$|\vec{v}| \frac{\partial \rho}{\partial v} = -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v},$$

wobei allgemein $\frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}} \equiv \hat{n} \cdot \vec{\nabla} \phi$ die Richtungsableitung des skalaren Feldes ϕ in Richtung des Einheitsvektors \hat{n} definiert.

b) Das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v} = \vec{v}(x, y)$ einer zweidimensionalen Flüssigkeit sei gegeben durch $\vec{v}(x, y) = u(x, y)\vec{e}_1 - v(x, y)\vec{e}_2$.

Zeige, daß, wenn die Flüssigkeit inkompressibel ($\rho = \text{const.}$) und die Strömung wirbelfrei sind, gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Aufgabe 3: Elektrodynamik (10 Punkte = 5+5).

Im Vakuum lauten die Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \end{aligned}$$

wobei man $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$ die magnetische Induktion und $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$ das elektrische Feld nennt. Die Größen ε_0 und μ_0 sind die elektrische und die magnetische Feldkonstante.

a) Zeige, daß die Felder \vec{B} und \vec{E} im Vakuum der sogenannten homogenen Wellengleichung genügen, daß also gilt

$$\Delta \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{und} \quad \Delta \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Anleitung: Beweise zunächst die für ein allgemeines Vektorfeld $\vec{a} = \vec{a}(\vec{r})$ gültige Relation

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \Delta \vec{a}$$

und wende sie dann auf diesen Fall an.

b) Das Vektorpotential \vec{A} eines magnetischen Dipolmoments \vec{m} ist gegeben durch

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3}.$$

Zeige, daß das dazugehörige \vec{B} -Feld, das über $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ mit dem \vec{A} -Feld verknüpft ist, gegeben ist durch

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{|\vec{r}|^5} - \frac{\vec{m}}{|\vec{r}|^3} \right].$$

Anleitung: Beweise zunächst die für ein allgemeines Vektorfeld $\vec{a} = \vec{a}(\vec{r})$ und skalares Feld $\phi = \phi(\vec{r})$ gültige Relation

$$\vec{\nabla} \times (\vec{a}\phi) = \phi \vec{\nabla} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{\nabla} \phi$$

und nutze sie sowie Relation c aus Aufgabe 1 aus. Das magnetische Moment \vec{m} ist räumlich konstant.

Aufgabe 4: Krümmung (8 Punkte = 4+2).

Gegeben sei die Kurve $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ in der xy -Ebene.

- Berechne den allgemeinen Ausdruck für die Krümmung κ .
- Berechne κ für den Fall $\vec{r}(t) = (R \cosh(\omega t), R \sinh(\omega t))$.