THEORETIKUM ZUR MECHANIK I WS 09/10

Aufgabenblatt 1 **23.10.2009**

Aufgabe 1: Orthogonale Einheitsvektoren

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sind orthogonale Einheitsvektoren in x, y und $z-$Richtung.

a) Berechne die Ausdrücke

(i) $\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 - 5\vec{e}_3)$

(ii) $(\pi\vec{e}_1 + 5\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) \cdot (8\vec{e}_3 - 5\vec{e}_2)$

(iii) $(\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2) \cdot (8\vec{e}_2 - 6\vec{e}_2)$

(iv) $(6\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3) \cdot (2\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 + 18\vec{e}_3)$.

b) Bestimme α so, dass die Vektoren $\vec{a} = \vec{e}_1 - 6\alpha\vec{e}_2 + \alpha\vec{e}_3$ und $\vec{b} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\alpha\vec{e}_3$ orthogonal zueinander sind.

c) Wie lang ist die Projektion des Vektors $\vec{a} = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$ auf die Richtung des Vektors $\vec{b} = 2\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$?

d) Bestimme den Winkel (in Grad)

(i) zwischen den Vektoren $\vec{a} = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$ und $\vec{b} = 2\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$;

(ii) zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $2\vec{a}$;

(iii) zwischen den Vektoren $\vec{b}$ und $5\vec{b}$;

(iv) zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{e}_1$.

e) Zerlege den Vektor $\vec{a} = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$ in einen Vektor $\vec{a}_\perp$ senkrecht und einen Vektor $\vec{a}_\parallel$ parallel zum Vektor $\vec{b} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$. Überprüfe $\vec{a}_\perp \cdot \vec{a}_\parallel = 0$.

f) Bestimme *all* die Einheitsvektoren, die orthogonal zum Vektor $\vec{e}_3$ sind.

Aufgabe 2: Allgemeine Vektorrelationen

Beweise folgende Relationen:

a) $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

b) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$

c) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot [(\vec{b} \times \vec{c}) \times (\vec{c} \times \vec{a})] = [\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})]^2$.

Aufgabe 3: Mehrfachprodukte von Vektoren

Berechne für die Vektoren $\vec{a} = (1, 0, 2)$, $\vec{b} = (-1, 1, 5)$ und $\vec{c} = (-2, 1, 0)$ folgende Ausdrücke:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \,, \qquad (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \,, \qquad |(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}| \,,$$
$$|\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})| \,, \qquad (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{b} \times \vec{c}) \,, \qquad (\vec{a} \times \vec{b})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \,.$$

Aufgabe 4: Die Dirac-Funktion

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} a \text{ für } |x| < \frac{1}{2a} \\ \\ 0 \text{ für } |x| > \frac{1}{2a} \end{cases},$$

wobei a eine reelle und positive Zahl ist. Wie ändert sich die Form der Funktion $f(x)$, wenn der Parameter a variiert? Was für eine Form hat $f(x)$, wenn a sehr groß ist?
Berechne das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \ .$$

Gegeben sei eine Funktion $g(x) : (-\infty, \infty) \to \Re$. Wie kann man das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$$

abschätzen, wenn a sehr groß ist? (Tipp: für $|x| \ll 1$ man kann die Funktion $g(x)$ als konstant betrachten).